Révisions & Oraux ; Série N°1

Exercice 1 Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et T-périodique. Montrer que f admet une primitive T-périodique ssi $\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 2 Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(kx)$, $\sum\limits_{1\leq i\leq j\leq n} ij$ et le $DL_2(0)$ de $\frac{\ln(1+x)}{1+e^x}$.

Exercice 3 [CCP PSI 2024] 1. Soit $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$. Montrer que (u_n) est bien définie et que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. On pose $v_n = \frac{(-1)^n}{n}u_n$. Déterminer la nature de $\sum v_n$.

Exercice 4 [IMT MP 2024] Dans une urne comportant n boules numérotées de 1 à n, on tire trois boules simultanément et on note X le plus petit numéro tiré. Déterminer $X(\Omega)$ puis les probabilités $\mathbf{P}(X=1)$, $\mathbf{P}(X=2)$ et $\mathbf{P}(X=n)$.

Exercice 5 [CCP MP 2024] Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathcal{C}(A)=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\mid AM=MA\}$.

1. Quelles sont les matrices semblables à I_n ? Équivalentes à I_n ?
2. Si $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à A, montrer que $\dim\mathcal{C}(A)=\dim\mathcal{C}(B)$.
3. Si A est semblable à une matrice diagonale par blocs, de blocs diagonaux $\mathrm{Diag}(\lambda_1 I_{n_1},\lambda_2 I_{n_2},\ldots,\lambda_p I_{n_p})$, avec $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ distincts. Montrer que $\dim\mathcal{C}(A)=\sum_{i=1}^{p} n_i^2$.

Exercice 6 [Centrale PSI 2024] Soient $h>0$ et $W_h=\left\{f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\mid \forall x\in\mathbb{R},\ \int_x^{x+2h} f = 2\int_x^{x+h} f\right\}$.

1. Montrer que W_h est un espace vectoriel.
2. Pour $n\geq 1$, on note $f_n\colon x\mapsto \sin\left(\frac{2\pi n x}{h}\right)$. Montrer que la famille $(f_n)_{n\geq1}$ est une famille libre d'éléments de W_h. Qu'en déduit-on quant à la dimension de W_h ?
3. ★ L'espace vectoriel W_h possède-il une fonction non bornée ?

Exercice 7 [Centrale MP 2024] Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$. On considère

$$p=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \quad \text{et} \quad V^G=\{x\in E\ ;\ \forall g\in G,\ g(x)=x\}.$$

1. Montrer que, si $h\in G$, $g\in G\mapsto h\circ g\in G$ est une bijection de G sur lui-meme, puis que p est un projecteur.
2. Montrer que $\dim(V^G)=\dfrac{1}{|G|}\sum\mathrm{tr}(g)$.
3. ★ Montrer que tout sous-espace V de E stable par tous les éléments de G admet un supplementaire stable par tous les éléments de G. On pourra partir d'un projecteur q de E sur V et considérer $\dfrac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} g\circ q\circ g^{-1}$.

Exercice 8 Pour $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, et $a<b\in[0,1]$, on note $V_a^b(f)$ la borne supérieure des $\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$, où $n\geq1$ et $a=x_0\leq\cdots\leq x_n=b$ est une subdivision de $[a,b]$. On dit que f est à variations bornées si $V_0^1(f)$ est fini.

1. Montrer que $|f(b)-f(a)|\leq V_a^b(f)$. Traiter le cas d'égalité.
2. Montrer que toute fonction lipschitzienne (resp. monotone) est à variations bornées
3. Montrer qu'il existe une fonction $\mathcal{C}^0$ qui n'est pas à variations bornées.
4. ★ Montrer que f est à variations bornées si et seulement si f est la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.

Exercice 9 [Mines MP 2024] 1. Soit f,g des fonctions continues positives telle que $f(x)=o_{+\infty}(g(x))$. On pose $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x)=\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$. On suppose que $F(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$, montrer que $F(x)=o_{+\infty}(G(x))$.

2. Donner un équivalent de $f(x)=\int_1^x t^t\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 10 [X MP 2024] Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, X_n une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. On considère les évènements : A_n : «$\sqrt{X_n}$ admet 1 pour 1er chiffre apres la virgule», B_n : «$\sqrt{X_n}$ admet 1 pour 1er chiffre», et C_n : «2^{X_n} admet 1 pour 1er chiffre».

1. Étudier l'existence et, le cas échéant, calculer la limite de la suite $(\mathbf{P}(A_n))$.
2. Étudier l'existence et, le cas échéant, calculer la limite de la suite $(\mathbf{P}(B_n))$.
3. Étudier l'existence et, le cas échéant, calculer la limite de la suite $(\mathbf{P}(C_n))$.

Exercice 11 [ENS MP 2024] Soient $e_1,\ldots,e_n$ des vecteurs d'un espace euclidien E tels que $\langle e_i,e_j\rangle\leq0$ pour tous i,j distincts dans $[\![1,n]\!]$. Montrer que $(e_1,\ldots,e_n)$ est libre si et seulement s'il existe une forme linéaire f sur E telle que $\forall i\in[\![1,n]\!],\ f(e_i)>0$.

Indications

Indication Exercice 5 3. Justifier brièvement quelles sont les matrices qui commutent avec une telle matrice diagonale par blocs, de blocs $\lambda_i I_{n_i}$.

Indication Exercice 6 3. Oui. On peut obtenir $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)=0$. Quelles sont les fonctions vérifiant cette propriété ?

Indication Exercice 7 3. Question difficile et indépendante des précédentes, il faut vérifier que la quantité π donnée est un projecteur, mais sans calculer π^2.

Indication Exercice 8 4. Il faut penser à introduire la bonne fonction croissante, en utilisant le fait que f est à variations finies.

Indication Exercice 9 2. $\frac{x^x}{\ln x}$.